

TEORIA DE ONDAS GUIADAS
Prof. Dr. Ben-Hur Viana Borges
Primeiro semestre de 2003

1- Equações de Maxwell:

Equação	Lei Empírica da qual foi derivada
$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$	Lei de indução de Faraday
$\nabla \times \bar{H} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \bar{J}$	Lei da circuitação de Ampère
$\nabla \cdot \bar{D} = \rho$	Lei de Gauss
$\nabla \cdot \bar{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$	Equação da continuidade de corrente
$\nabla \cdot \bar{B} = 0$	Lei da força de Ampère

Onde:

\bar{E} : vetor intensidade de campo elétrico, (V/m)

\bar{H} : vetor intensidade de campo magnético, (A/m)

\bar{D} : vetor densidade de fluxo elétrico, (C/ m²)

\bar{B} : vetor densidade de fluxo magnético, (Wb/m²) ou Tesla (T)

\bar{J} : vetor densidade de corrente, (A/ m²)

ρ : densidade de carga, (C/m³)

1.1- Relações Constitutivas:

As equações de Maxwell contém 12 escalares, dos quais apenas 6 são independentes. Desta forma, torna-se necessário a utilização de equações suplementares para que o conjunto de equações seja resolvido. Isto pode ser feito por meio das relações constitutivas que são derivadas a seguir.

Na forma geral, as equações constitutivas são escritas como:

$$\bar{D} = \tilde{\epsilon}\bar{E} + \tilde{\xi}\bar{H}$$

$$\bar{B} = \tilde{\varphi}\bar{E} + \tilde{\mu}\bar{H}$$

onde $\tilde{\epsilon}$, $\tilde{\xi}$, $\tilde{\varphi}$ e $\tilde{\mu}$ são matrizes 3x3, também conhecidas como tensores. Por exemplo,

$$\tilde{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix}$$

As relações constitutivas podem ser convenientemente escritas na forma matricial como segue,

$$\begin{bmatrix} \bar{D} \\ \bar{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\epsilon} & \tilde{\xi} \\ \tilde{\varphi} & \tilde{\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{E} \\ \bar{H} \end{bmatrix} = \tilde{c} \begin{bmatrix} \bar{E} \\ \bar{H} \end{bmatrix}$$

onde \tilde{c} é a matriz constitutiva. Os meios são classificados de acordo com a dependência específica de \tilde{c} da seguinte forma:

- 1) Não-homogêneo: \tilde{c} é função das coordenadas espaciais;
- 2) Não-estacionário: \tilde{c} é função do tempo;
- 3) Dispersivo no tempo: \tilde{c} é função de $\frac{\partial}{\partial t}$;
- 4) Dispersivo no espaço: \tilde{c} é função de $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ e $\frac{\partial}{\partial z}$;
- 5) Não-linear: \tilde{c} é função da intensidade de campo.

Os meios podem, ainda, ser classificados de acordo com:

- a) $\tilde{\varphi} = \tilde{\xi} = 0$: meio anisotrópico (não há acoplamento entre \bar{E} e \bar{H});
- b) $\tilde{\varphi} \neq 0$ e $\tilde{\xi} \neq 0$: meio bi-anisotrópico;
- c) $\tilde{\varphi} = \tilde{\xi} = 0$ com $\tilde{\epsilon} = \epsilon \tilde{I}$ e $\tilde{\mu} = \mu \tilde{I}$ (\tilde{I} é a matriz unidade 3x3): meio isotrópico;
- d) $\tilde{\varphi} = \varphi \tilde{I}$, $\tilde{\xi} = \xi \tilde{I}$, $\tilde{\epsilon} = \epsilon \tilde{I}$, $\tilde{\mu} = \mu \tilde{I}$: meio bi-isotrópico (meio magneto-elétrico).

Assim,

Tipo de meio	Relação constitutiva
Isotrópico	$\bar{D} = \epsilon \bar{E}$ $\bar{B} = \mu \bar{H}$
Bi-isotrópico	$\bar{D} = \epsilon \bar{E} + \xi \bar{H}$ $\bar{B} = \varphi \bar{E} + \mu \bar{H}$

No vácuo, temos:

$$\epsilon = \epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

$$\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$$

Velocidade da luz no vácuo: $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 2,998 \times 10^8$ m/s.

Os meios usuais são: isotrópicos, homogêneos, lineares, etc. Meios dielétricos também podem apresentar perdas de propagação (normalmente este é o caso). Sendo assim, tem-se:

$$\begin{aligned}\epsilon &= \epsilon' - j\epsilon'' \\ \mu &= \mu' - j\mu''\end{aligned}$$

1.2- Derivação da equação de onda a partir das Equações de Maxwell para um meio sem perdas e livre de cargas:

As equações de Maxwell em um meio sem cargas são

$$\nabla \times \bar{H} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \bar{D} = 0 \quad (4)$$

onde $\bar{B} = \mu \bar{H}$ e $\bar{D} = \epsilon \bar{E}$. Procedendo com a manipulação das equações de Maxwell, obtém-se a equação de onda vetorial para espaço livre para campo elétrico:

$$\nabla^2 \bar{E} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} \quad (5)$$

(a derivação desta equação será dada em sala de aula).

Uma equação similar para campo magnético também pode ser encontrada, ou seja,

$$\nabla^2 \bar{H} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} \quad (6)$$

(a derivação desta equação é deixada como exercício).

1.3- Soluções da Equação de Onda:

Em geral, há 3 tipos de situações em que se utiliza as equações de onda:

- 1) Utilização das equações de onda na ausência de fontes (fontes no infinito)
Ex.: Propagação de ondas no espaço livre, em guias, linhas coaxiais, etc.
- 2) Determinação dos campos EM para uma distribuição conhecida de fontes (\bar{J} e ρ)
Ex.: Antenas, excitação de guias, cavidades.
- 3) Interação entre fontes e campos

Determinam-se os campos em função de \bar{J} e ρ . Obtém-se também um conjunto de equações que exprimem \bar{J} e ρ em função dos campos. A solução final é auto-consistente desses dois conjuntos de equações.

Ex.: Ondas em plasmas, acoplamento entre feixe eletrônico e um estrutura periódica.

Para se determinar como se propagam as ondas eletromagnéticas em guias ou no espaço livre, temos três métodos principais:

- 1) Utilizando-se as equações de onda dos campos diretamente, que podem ser reduzidas a equações escalares fixando-se a dependência longitudinal das ondas;
- 2) Utilizando-se os potenciais auxiliares \bar{A} e $\bar{\phi}$;
- 3) Utilizando-se os potenciais vetoriais de Hertz.

A equação de onda para campo elétrico pode ser resolvida supondo que este campo pode ser representado pela seguinte equação:

$$\bar{E}(\bar{r}, t) = \bar{E}(\bar{r})e^{j\omega t} \quad (7)$$

Vale lembrar que apenas a parte real desta equação, $\Re\{\bar{E}(\bar{r}, t)\}$, tem significado físico.

Substituindo (7) na equação de onda para campo elétrico, (5), e expandindo, a seguinte solução pode ser obtida para a componente E_x :

$$E_x = E_x^+ e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}} + E_x^- e^{+j\bar{k}\cdot\bar{r}}$$

onde

$$\bar{k} = k\hat{n}$$

é o vetor propagação, cujo módulo é o número de onda k e a direção é a do vetor unitário \hat{n} .

$$\bar{r} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z$$

é o raio vetor, cujas componentes indicam as coordenadas do ponto em que o campo é observado.

$$\hat{n} = n_x\hat{a}_x + n_y\hat{a}_y + n_z\hat{a}_z$$

é o vetor unitário, perpendicular às superfícies de fase constante, na direção de propagação.

A componente temporal física (real) do campo elétrico ou magnético pode ser obtida da equação (7), ou seja,

$$\psi = A^+ \cos(\omega t - k\hat{n}\cdot\bar{r}) + A^- \cos(\omega t + k\hat{n}\cdot\bar{r}) \quad (8)$$

A eq. (8) descreve duas ondas planas propagando-se na direção $\pm \hat{n}$.

$$A^+ \cos(\omega t - k\hat{n}\cdot\bar{r}) \rightarrow \text{na direção } + \hat{n}$$

$$A^- \cos(\omega t + k\hat{n}\cdot\bar{r}) \rightarrow \text{na direção } - \hat{n}$$

Ex.: Propagação na direção (+z)

$$\hat{n} = \hat{a}_z$$

$$\bar{k} = k\hat{a}_z$$

$$\bar{r} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z$$

$$\hat{n} \cdot \bar{r} = (\hat{a}_z) \cdot (x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z) = z$$

Assim,

$$\psi = A^+ \cos(\omega t - kz) + A^- \cos(\omega t + kz)$$

1.4- Classificação das soluções da equação de onda

O que é um “Modo”: é um arranjo único de campos elétrico e magnético propagando-se em uma direção, que satisfaz todas as equações de Maxwell e as condições de contorno impostas pela geometria do guia.

Classificação dos modos

- 1) TEM: modo eletromagnético transversal. Não há componentes de campo elétrico e magnético na direção de propagação. As componentes não-nulas estão no plano transversal à direção de propagação.

$$E_z = H_z = 0$$

Onde estes modos podem ser observados: espaço livre, planos condutores paralelos, linha coaxial.

- 2) TE: modo elétrico transversal. Não há componente de campo elétrico na direção de propagação. A componente não nula do campo elétrico está no plano transversal ao de propagação.

$$E_z = 0 \text{ e } H_z \neq 0$$

Onde estes modos podem ser observados: linha coaxial, planos condutores paralelos, guias retangulares e circulares.

- 3) TM: modo magnético transversal. Não há componente de campo magnético na direção de propagação. A componente não nula do campo magnético está no plano transversal ao de propagação.

$$E_z \neq 0 \text{ e } H_z = 0$$

Onde estes modos podem ser observados: linha coaxial, planos condutores paralelos, guias retangulares e circulares.

- 4) HE: modo híbrido. Os campos elétrico e magnético possuem componentes ao longo da direção de propagação.

$$E_z \neq 0 \text{ e } H_z \neq 0 \text{ (geralmente)}$$

Onde estes modos podem ser observados: estruturas que possuem interface dielétrica.

1.5- Reflexão e refração de Ondas em Interfaces Dielétricas

Entregue em arquivo anexo.

1.6- Teoria Eletromagnética

Nesta seção serão revistas algumas das definições básicas e leis da óptica que são de extrema importância no projeto e análise de guias de ondas ópticos integrados e em fibra. Um dos parâmetros ópticos fundamentais de um material é *índice de refração*. Este parâmetro é definido como sendo a razão entre a velocidade da luz no vácuo ($c_0=3 \times 10^8$ m/s) e a velocidade da luz no material (c), ou seja:

$$n = \frac{c_0}{c} \quad (1)$$

A Tabela I mostra os valores típicos de índice de refração para alguns materiais comumente encontrados. Outro parâmetro importante em óptica é o comprimento de onda da luz, normalmente chamado de λ . O comprimento de onda λ está relacionado à velocidade da luz no meio, c , e à frequência, ν , da seguinte forma:

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

Em se tratando de óptica guiada, ou seja, na habilidade de confinar a energia em uma região limitada do espaço, é de extrema importância compreender os conceitos de reflexão e transmissão que ocorrem na interface entre dois meios dielétricos. Portanto, considere dois meios dielétricos como ilustrado na Figura 2, onde um raio de luz proveniente do meio 1 incide obliquamente na interface com o meio 2 (supondo $n_1 > n_2$). Quando um fenômeno como este ocorre, parte da luz é refletida de volta para o meio 1 e parte é transmitida para o meio 2. A mudança de direção do raio de luz, também conhecida como refração, ocorre em virtude da diferença de velocidade da mesma nos dois materiais. Como os índices de refração dos materiais e o ângulo de incidência são sempre conhecidos, é possível obter o ângulo de transmissão para o meio 2 por intermédio da seguinte equação

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2) \quad (2)$$

Esta equação é conhecida como Lei de Snell, e ela relaciona o ângulo de incidência com o ângulo de transmissão em uma interface dielétrica.

Tabela I. Índices de refração de alguns materiais comumente encontrados.

Material	índice de refração
ar	1,0
água	1,33
sílica fundida	1,46
vidro	~ 1,5
polistireno	1,59
germânio	4,0
silício	3,5
safira	1,8
arseneto de gálio	3,35
cloreto de sódio	1,54
calcita	1,6

Infelizmente, dois meios dielétricos apenas ainda não permitem o guiamento de luz. Suponha neste momento que o meio 2 tenha espessura infinita a partir da interface com o meio 1. Se pudermos impedir que o raio incidente não seja transmitido para o meio 2 teremos o primeiro passo para confinarmos a luz em uma região. Pela equação (2) é possível verificar que existe um ângulo no qual o raio transmitido permanece paralelo à interface entre os dois meios. Este ângulo de incidência é conhecido como ângulo crítico, ou seja, qualquer ângulo acima deste irá provocar a transmissão da luz para o meio 2, e uma vez que o meio 2 é infinito ele não permite que a luz seja guiada. No entanto, se o ângulo de incidência for maior que o ângulo crítico, toda luz incidente é refletida de volta para o meio 1. Estas situações são ilustradas na Figura 3(a) e 3(b), respectivamente. Já sabemos como impedir que a luz seja transmitida para o meio 2, mas o meio 1 ainda é um meio infinito e como tal não permite o confinamento da luz. O próximo passo então consiste em limitar a espessura do meio 1 e adicionar um segundo meio logo abaixo, como mostra a Figura 4. A espessura do meio 1, onde a luz será guiada, deve ser comparável ao comprimento de onda da luz que se pretende guiar. O segundo meio pode ou não ser idêntico ao meio 2 (aqui ele é idêntico). Observe agora que o raio de luz permanece confinado no meio 1, ou seja, no meio com maior índice de refração. Portanto, para que haja guiamento de luz, esta deve ser confinada em um sanduíche de camadas onde a camada guia de onda, muitas vezes referenciada na literatura como “filme” (por ser uma fina película de material dielétrico, daí vir o nome filme), deve apresentar o maior índice de refração entre todas. Esta característica poderá ser melhor entendida mais à frente.

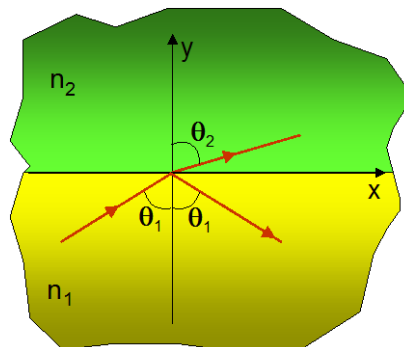


Figura 2. Incidência oblíqua de luz em uma interface dielétrica onde $n_1 > n_2$. O ângulo de transmissão θ_2 é obtido por intermédio da Lei de Snell.

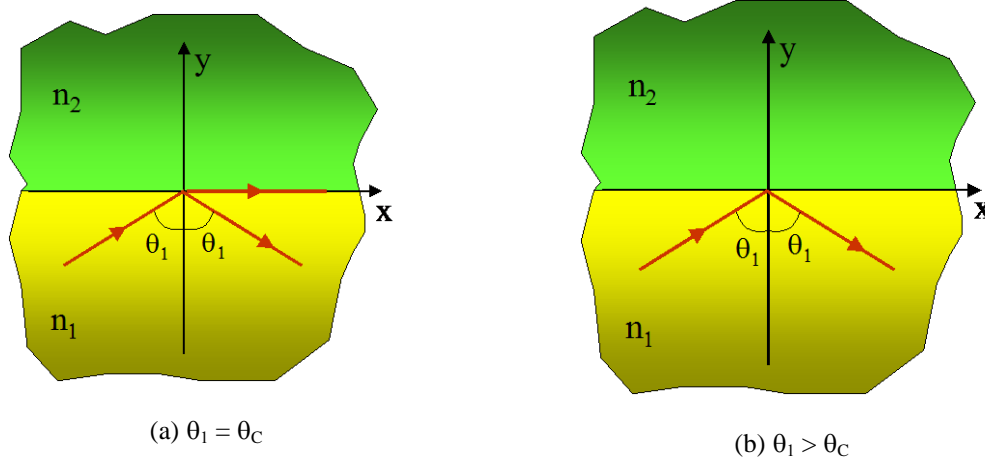


Figura 3. Incidência oblíqua em uma interface dielétrica. (a) ângulo de incidência igual ao ângulo crítico, e (b) ângulo de incidência maior que o ângulo crítico.

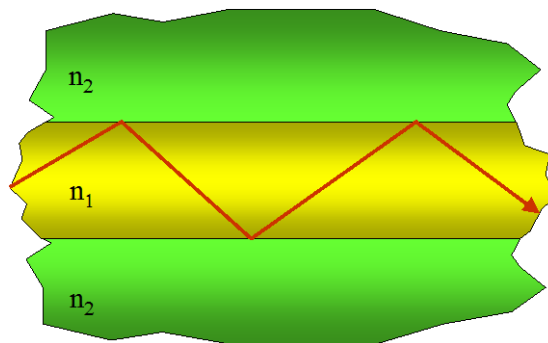


Figura 4. Guia de onda óptico. Para que a luz seja guiada, a camada n_1 deve apresentar uma espessura finita (comparável ao comprimento de onda da luz que se pretende guiar) e ainda apresentar um índice de refração superior àqueles das camadas adjacentes.

Todo o processo de confinamento da luz foi elaborado aqui em termos da Lei de Snell. Podemos dar um passo adiante com esta Lei e definir as condições de excitação necessárias para o guia de onda de modo a garantir que a maior parte da luz acoplada em sua entrada permaneça confinada na camada n_1 . Isto pode ser feito novamente pelo meio da Lei de Snell que, após uma álgebra bem simples, produz a seguinte relação:

$$NA = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \tag{3}$$

Esta equação é conhecida como abertura numérica, e o ângulo máximo de aceitação de luz pelo guia de onda, ou seja, o ângulo que define o cone de aceitação de luz, é dado por $\theta_0 = \text{sen}^{-1}(NA)$, como mostra a Figura 5.

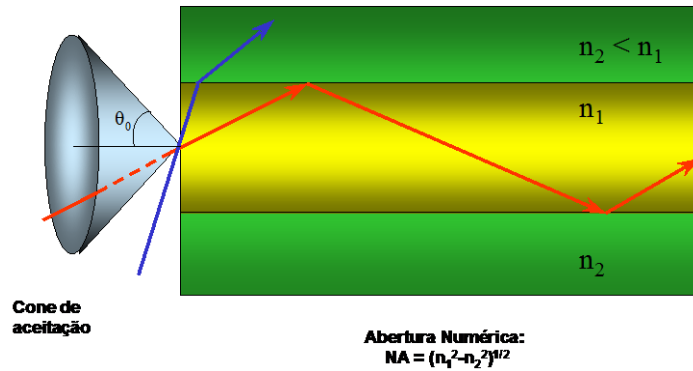


Figura 5. Cone de aceitação de luz de um guia de onda óptico. Todo raio de luz cujo ângulo de incidência for menor ou igual ao ângulo $\pm\theta_0$ permanecerá confinado na região n_1 .

Quando um guia de onda óptico é excitado por uma frente de onda plana, como ilustra a Figura 6, ocorre um encurvamento da mesma em função do perfil de índice de refração da estrutura. Isto se deve ao fato de que a velocidade da luz em um meio é dada pela razão entre a velocidade da luz no vácuo e o índice de refração deste meio, ou seja: $c = c_0/n$. No exemplo em questão, a luz irá se propagar mais lentamente no interior da região guia de onda (filme, $n=1,5$), um pouco mais rápida no substrato ($n=1,4$), e mais rapidamente no ar ($n=1,0$). Este efeito, conhecido como efeito “lente” faz a luz se concentrar na região de maior índice de refração, neste caso, no filme.

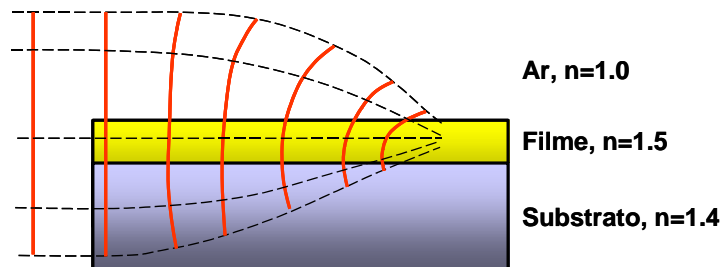


Figura 6. Efeito “lente” em guias de ondas ópticos. A velocidade da frente de onda é diferente em cada uma das camadas, isto produz uma focalização da luz na região onde o índice de refração é maior.

Os aspectos de guiamento da luz em um guia de onda óptico foram definidos até este ponto em termos da óptica geométrica, ou seja, da teoria de raios. No entanto, para que um estudo mais criterioso seja feito, uma análise em termos da solução das equações de Maxwell torna-se necessária. Sendo assim, considere um meio dielétrico linear (não apresenta variações do índice de refração em função da potência óptica da onda eletromagnética que se propaga) e isotrópico (apresenta as mesmas características em todas as direções). Considere ainda que não existam correntes nem cargas neste meio. Assim, as equações de Maxwell podem ser escritas da seguinte forma:

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \tag{4}$$

$$\nabla \times \bar{H} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \bar{D} = 0 \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \quad (7)$$

$$\bar{B} = \mu \bar{H} \quad (8)$$

$$\bar{D} = \varepsilon \bar{E} \quad (9)$$

onde ε é a permissividade dielétrica e μ é a permeabilidade magnética do meio. A análise de guias de ondas ópticos por meio das equações de Maxwell deve levar em consideração a geometria da estrutura que se pretende resolver. Assim, se queremos analisar guias de ondas em óptica integrada, que normalmente apresentam geometria retangular, devemos considerar as equações (4)-(9) em coordenadas retangulares. No caso de fibras ópticas, com geometria cilíndrica, devemos resolver estas mesmas equações em coordenadas cilíndricas. Sendo assim, dividiremos esta análise em duas partes, sendo a primeira dedicada a estruturas retangulares e a segunda dedicada a estruturas cilíndricas (as fibras ópticas).

1.6.1- Guias de Ondas Retangulares

Os guias de onda retangulares são dispositivos que encontram uma vasta área de aplicações em óptica integrada. Alguns dos mais importantes exemplos de aplicações são os lasers, os acopladores direcionais, as chaves ópticas, os sensores ópticos, etc. Estes dispositivos podem apresentar várias configurações possíveis em termos de geometria, porém a mais básica é o guia de onda óptico planar de três camadas mostrado na Figura 7. A seguir serão dadas as bases para a análise deste dispositivo que podem ser facilmente estendidas para geometrias mais complexas.

Estes guias de ondas suportam a propagação de modos com duas polarizações distintas, ou seja, modos TE, ou elétrico transversal (apenas uma componente de campo elétrico na direção transversal) e modos TM, ou magnético transversal (apenas uma componente de campo magnético na direção transversal). Modo é um padrão de energia luminosa que deve satisfazer as equações de Maxwell e suas condições de contorno, como veremos a seguir. Os modos TE são caracterizados por 3 componentes de campo eletromagnético, isto é, E_y , H_x e H_z (E_y é a componente principal). Os modos TM, por sua vez, também apresentam 3 componentes de campo sendo elas H_y , E_x e E_z (H_y é a componente principal). Qualquer um destes modos podem ser excitados na entrada do guia de onda e sua escolha dependerá da aplicação a que o guia de onda se destina. A solução das equações de Maxwell para ambas as polarizações será apresentada a seguir.

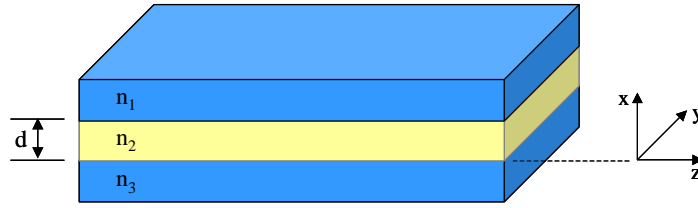


Figura 7. Guia de onda óptico planar de três camadas.

1.6.1.1- Modos TE:

Uma vez que a geometria da estrutura é retangular, o problema deve ser formulado em termos de coordenadas retangulares. As componentes de campo para modos TE são E_y , H_x , H_z e a dependência no tempo e na direção longitudinal de cada uma destas componentes é dada por

$$e^{j(\omega t - \beta z)}$$

Esta dependência será omitida nas próximas equações para simplificar a notação. Substituindo (8) e (9) nas equações (4) e (5) e levando em consideração a dependência no tempo e na direção longitudinal acima, temos

$$\nabla \times \bar{E} = -j\omega \mu \bar{H} \quad (10)$$

$$\nabla \times \bar{H} = j\omega \epsilon \bar{E} \quad (11)$$

O objetivo aqui é encontrar uma equação envolvendo apenas a componente de campo principal dos modos TE, ou seja, a componente E_y . Sendo assim, expanda a equação (10) com as três componentes de campo eletromagnético dadas

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = -j\omega \mu [H_x \hat{x} + H_z \hat{z}]$$

Assim,

$$\hat{x} \left[0 - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right] - \hat{y} (0 - 0) + \hat{z} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - 0 \right) = -j\omega \mu [H_x \hat{x} + H_z \hat{z}]$$

Agrupando os termos de mesma direção, temos:

Na direção \hat{x} :

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z} = -j\omega \mu H_x$$

$$H_x = -\frac{j}{\omega \mu} \frac{\partial E_y}{\partial z}$$

Uma vez que a dependência ao longo do eixo z é dada por $e^{-j\beta z}$, resulta que

$$H_x = -\frac{\beta}{\omega \mu} E_y \quad (12)$$

Na direção \hat{z} :

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -j\omega \mu H_z$$

$$H_z = \frac{j}{\omega \mu} \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (13)$$

Expandindo a equação (11) para as mesmas 3 componentes, temos

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & 0 & H_z \end{vmatrix} = j\omega \varepsilon E_y \hat{y}$$

Ou seja,

$$\hat{x} \left[\frac{\partial H_z}{\partial y} - 0 \right] - \hat{y} \left[\frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z} \right] + \hat{z} \left[0 - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right] = j\omega \varepsilon E_y \hat{y}$$

Agrupando os termos de mesma direção:

Na direção \hat{x} :

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = 0 \quad (14)$$

Na direção \hat{y} :

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} + \frac{\partial H_x}{\partial z} = j\omega \varepsilon E_y$$

Sabendo que a dependência em relação a z é dada por $e^{-j\beta z}$, temos

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} - j\beta H_x = j\omega \varepsilon E_y \quad (15)$$

Na direção \hat{z} :

$$-\frac{\partial H_x}{\partial y} = 0 \quad (16)$$

Substituindo (12) e (13) em (15), resulta em

$$-j \frac{1}{\omega \mu} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + j \frac{\beta^2}{\omega \mu} E_y = j \omega \varepsilon E_y$$

Multiplicando ambos os lados por $\left(-\frac{\omega \mu}{j}\right)$ e sabendo que $\omega^2 \mu \varepsilon = k_0^2 n^2$, resulta:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + (k_0^2 n^2 - \beta^2) E_y = 0 \quad (17)$$

Esta equação é conhecida como a equação de onda de Helmholtz para modos TE e, como se pode ver, está em função apenas da componente de campo elétrico principal. Tudo que precisamos agora é resolver esta equação diferencial de segunda ordem como segue.

Da equação (17) podemos definir $\kappa' = \sqrt{k_0^2 n^2 - \beta^2}$, assim, a solução geral do para a Eq. de Helmholtz torna-se:

$$E_y(x) = A e^{-j\kappa'x} + B e^{j\kappa'x} \quad (18)$$

Antes de proceder com a solução da equação de Helmholtz, precisamos definir o que chamamos de *condição de radiação* para o guia de onda da Figura 7. Para isso precisamos interpretar fisicamente o que seria uma solução que represente corretamente um modo guiado dentro desta estrutura. A condição para que um modo guiado exista em um guia de ondas é que a equação (18) apresente uma solução oscilatória na camada guia de onda, ou seja, na camada n_2 . Nas camadas adjacentes (camadas n_1 e n_3) o que se espera é que a amplitude do campo decaia exponencialmente à medida que em que este se afasta do núcleo do guia, tendendo a zero quando o eixo x tender a $\pm\infty$. Assim, temos que

κ' = puramente real na camada 2

κ' = puramente imaginário nas camadas 1 e 3.

Em um guia de ondas óptico, sabemos que a seguinte relação entre os índices de refração deve ser satisfeita: $n_2 > (n_1, n_3)$. O índice n_1 não necessariamente precisa ser igual ao índice n_3 , mas quando este for o caso temos o que se chama de guia de onda simétrico. Quando n_1 é diferente de n_3 temos um guia assimétrico. Assim, as constantes de propagação longitudinais, β , que deverão ser encontradas via solução da equação de Helmholtz, estarão sempre dentro de uma faixa específica de variação que dependerá do tipo do guia de onda (se simétrico ou assimétrico). No caso de um guia simétrico, temos

$$k_0 n_1 < \beta < k_0 n_2 \quad (n_1 = n_3)$$

E no caso de um guia assimétrico

$$k_0 n_3 < \beta < k_0 n_2 \quad (n_1 < n_3, \text{ por exemplo})$$

Como κ' tem que ser puramente imaginário nas camadas n_1 e n_3 , podemos escreve-lo como sendo:

$$\kappa'_1 = \sqrt{(-1)(-k_0^2 n_1^2 + \beta^2)}, \text{ ou } \kappa'_1 = j\sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_1^2} = jk_1$$

para a camada n_1 , e

$$\kappa'_3 = j\sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_3^2} = jk_3$$

para a camada n_3 , onde $k_1^2 = \beta^2 - k_0^2 n_1^2$ e $k_3^2 = \beta^2 - k_0^2 n_3^2$.

Na camada n_2 , κ' tem que ser puramente real para permitir oscilação, assim

$$\kappa'_2 = \sqrt{k_0^2 n_2^2 - \beta^2} = k_2.$$

Agora que já definimos as constantes de propagação em cada camada, o próximo passo é escrever (18) em uma forma mais conveniente. Na camada n_1 , temos que

$$E_y^{(1)}(x) = A_1 e^{k_1 x} + B_1 e^{-k_1 x}$$

Como o campo nesta região tem que tender a zero quando x tende a infinito, então a constante de integração $A_1=0$, assim o campo torna-se

$$E_y^{(1)}(x) = B_1 e^{-k_1 x}, \text{ ou em uma forma mais conveniente}$$

$$E_y^{(1)}(x) = B_1 e^{-k_1(x-d)} \quad \text{válido para } d \leq x \leq +\infty$$

Na camada n_2 , temos

$$E_y^{(2)}(x) = A_2 e^{-jk_2 x} + B_2 e^{jk_2 x}$$

$$E_y^{(2)}(x) = A_2 [\cos(k_2 x) - j \operatorname{sen}(k_2 x)] + B_2 [\cos(k_2 x) + j \operatorname{sen}(k_2 x)]$$

$$E_y^{(2)}(x) = [A_2 + B_2] \cos(k_2 x) + j(B_2 - A_2) \operatorname{sen}(k_2 x)$$

Fazendo $C = [A_2 + B_2]$ e $D = j(B_2 - A_2)$, resulta

$$E_y^{(2)}(x) = C \cos(k_2 x) + D \operatorname{sen}(k_2 x) \quad \text{válido para } 0 \leq x \leq d$$

Finalmente, na camada n_3

$$E_y^{(3)}(x) = A_3 e^{k_3 x} + B_3 e^{-k_3 x}$$

Como para x tendendo a menos infinito o campo nesta região tem que tender a zero, temos que $B_3 = 0$, assim

$$E_y^{(3)}(x) = A_3 e^{k_3 x} \quad \text{válido para } -\infty \leq x \leq 0.$$

Reescrevendo os campos, temos

$$E_y^{(1)}(x) = A e^{-k_1(x-d)} \quad d \leq x \leq +\infty \quad (19)$$

$$E_y^{(2)}(x) = B \cos(k_2 x) + C \sen(k_2 x) \quad 0 \leq x \leq d \quad (20)$$

$$E_y^{(3)}(x) = D e^{k_3 x} \quad -\infty \leq x \leq 0 \quad (21)$$

Agora devemos aplicar as condições de contorno em cada interface para se determinar as constantes A a D. As condições de contorno implicam na continuidade das componentes tangenciais às interfaces, o que no caso de modos TE são: E_y e H_z

a) impondo continuidade de E_y :

Em $x = d$:

$$E_y^{(1)}(d) = E_y^{(2)}(d)$$

$$\begin{aligned} A e^{-k_1(d-d)} &= B \cos(k_2 d) + C \sen(k_2 d) \\ A &= B \cos(k_2 d) + C \sen(k_2 d) \end{aligned} \quad (22)$$

Substituindo (22) em (19), temos

$$E_y^{(1)}(x) = [B \cos(k_2 d) + C \sen(k_2 d)] e^{-k_1(x-d)} \quad (23)$$

Em $x = 0$:

$$E_y^{(2)}(0) = E_y^{(3)}(0)$$

$$B \cos(0) + C \sen(0) = D e^{k_3 \cdot 0}, \text{ de onde resulta que}$$

$$D = B \quad (24)$$

Substituindo (24) em (21), resulta

$$E_y^{(3)}(x) = B e^{k_3 x} \quad (25)$$

Assim, com a primeira condição de contorno já aplicada, os campos podem ser rescritos como:

$$E_y^{(1)}(x) = [B \cos(k_2 d) + C \operatorname{sen}(k_2 d)] e^{-k_1(x-d)} \quad (26)$$

$$E_y^{(2)}(x) = B \cos(k_2 x) + C \operatorname{sen}(k_2 x) \quad (27)$$

$$E_y^{(3)}(x) = B e^{k_3 x} \quad (28)$$

b) impondo continuidade de H_z :

Observe que os campos em cada camada foram escritos em função da componente principal, E_y . Como estamos interessados em aplicar a continuidade de H_z nas interfaces, precisamos encontrar uma relação entre essas duas componentes de campo. Na verdade isso já foi feito durante a derivação da equação de onda de Helmholtz, como pode ser visto na equação (13), ou seja

$$H_z = \frac{j}{\omega \mu} \frac{\partial E_y}{\partial x}, \text{ assim podemos aplicar esta equação nas interfaces diretamente.}$$

Em $x = d$:

$$\left. \frac{j}{\omega \mu_0} \frac{\partial E_y^{(1)}}{\partial x} \right|_{x=d} = \left. \frac{j}{\omega \mu_0} \frac{\partial E_y^{(2)}}{\partial x} \right|_{x=d}$$

O termo $\frac{j}{\omega \mu_0}$ é o mesmo em ambos os lados da interface e pode, portanto, ser simplificado. Assim temos:

$$-k_1 [B \cos(k_2 d) + C \operatorname{sen}(k_2 d)] e^{-k_1(d-d)} = -k_2 B \operatorname{sen}(k_2 d) + k_2 C \cos(k_2 d)$$

$$B [-k_1 \cos(k_2 d) + k_2 \operatorname{sen}(k_2 d)] = C [k_1 \operatorname{sen}(k_2 d) + k_2 \cos(k_2 d)]$$

Colocando $\cos(k_2 d)$ em evidência:

$$B \cos(k_2 d) [-k_1 + k_2 \tan(k_2 d)] = C \cos(k_2 d) [k_1 \tan(k_2 d) + k_2]$$

Após simplificação, temos:

$$B = C \cdot \frac{k_1 \tan(k_2 d) + k_2}{k_2 \tan(k_2 d) - k_1} \quad (29)$$

Em $x = 0$:

$$\left. \frac{j}{\omega \mu_0} \frac{\partial E_y^{(2)}}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{j}{\omega \mu_0} \frac{\partial E_y^{(3)}}{\partial x} \right|_{x=0}$$

Simplificando, temos:

$$-k_2 B \operatorname{sen}(k_2 \cdot 0) + k_2 C \cos(k_2 \cdot 0) = k_3 B e^{-k_3 \cdot 0}$$

$k_2 C = k_3 B$, de onde temos que

$$B = \frac{k_2}{k_3} C \quad (30)$$

As equações (29) e (30) podem ser escritas na forma de matriz da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{k_1 \tan(k_2 d) + k_2}{k_2 \tan(k_2 d) - k_1} \\ 1 & -\frac{k_2}{k_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A condição para solução não trivial requer que o determinante da matriz de coeficientes seja igual a 0 (zero), então:

$$-\frac{k_2}{k_3} + \frac{k_1 \tan(k_2 d) + k_2}{k_2 \tan(k_2 d) - k_1} = 0$$

Rearranjando, obtemos

$$\tan(k_2 d) = -\frac{k_2 [k_1 + k_3]}{k_1 k_3 - k_2^2}$$

ou

$$\tan(k_2 d) = k_2 \frac{[k_1 + k_3]}{k_2^2 - k_1 k_3} \quad (31)$$

A equação acima é conhecida como equação transcendental para modos TE. Vale a pena salientar que a única variável desconhecida nesta equação é a constante de propagação longitudinal, β , que pode ser facilmente obtida com qualquer rotina para obtenção de raízes. Uma boa sugestão é o método da procura em conjunto com o método da bissecção. As equações de campo podem ser escritas em função de uma única constante de integração (B ou C, ver equações de (27) a (28) e (30)). Assim, escrevendo em função de B, temos

$$E_y^{(1)}(x) = B \left[\cos(k_2 d) + \frac{k_3}{k_2} \operatorname{sen}(k_2 d) \right] e^{-k_1(x-d)} \quad d \leq x \leq +\infty \quad (32)$$

$$E_y^{(2)}(x) = B \left[\cos(k_2 x) + \frac{k_3}{k_2} \operatorname{sen}(k_2 x) \right] \quad 0 \leq x \leq d \quad (33)$$

$$E_y^{(3)}(x) = B e^{k_3 x} \quad -\infty \leq x \leq 0 \quad (34)$$

A única constante que precisa ser calculada agora é B. Esta constante pode ser obtida via normalização do campo por intermédio da seguinte equação

$$-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} E_y(x) \times H_x^*(x) dx = 1 \quad (W/m)$$

Esta equação nos diz que a densidade de potência óptica transportada pelo modo é de 1W/m. Sabendo que:

$$H_x(x) = -\frac{\beta}{\omega \mu} E_y(x), \text{ temos}$$

$$\frac{\beta}{2\omega \mu} \int_{-\infty}^{\infty} |E_y(x)|^2 dx = 1 \quad \frac{W}{m} \quad (35)$$

No caso do guia de onda da Figura 7, a equação (35) ficará dividida em três contribuições distintas, sendo elas:

- 1) $d \leq x \leq +\infty$, onde deverá ser utilizada a equação (32)
- 2) $0 \leq x \leq d$, onde deverá ser utilizada a equação (33)
- 3) $-\infty \leq x \leq 0$, onde deverá ser utilizada a equação (34)

Em todos os casos, a integral resultante apresenta resultado analítico e exato, e é deixada aqui como exercício para o leitor.

1.6.1.2- Modos TM:

A derivação da equação de Helmholtz para modos TM segue o mesmo raciocínio anterior e será, portanto, resumida nesta seção. As componentes de campo neste caso são: H_y , E_x , E_z . A dependência em relação ao tempo e à coordenada espacial z são da mesma forma $e^{j(\omega t - \beta z)}$, e será omitida nas próximas equações.

Da equação (10) temos que

$$\hat{x} \left[\frac{\partial E_z}{\partial y} - 0 \right] - \hat{y} \left[\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right] + \hat{z} \left[0 - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right] = -j\omega \mu H_y \hat{y}$$

Agrupando os termos de mesma direção:

Direção \hat{x} :

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = 0$$

Direção \hat{z} :

$$-\frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$$

Direção \hat{y} :

$$-\frac{\partial E_z}{\partial x} - j\beta E_x = -j\omega \mu H_y \quad (36)$$

Expandindo (11), temos

$$\hat{x} \left[0 - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right] - \hat{y} [0 - 0] + \hat{z} \left[\frac{\partial H_y}{\partial x} - 0 \right] = j\omega \varepsilon [E_x \hat{x} + E_z \hat{z}]$$

Direção \hat{x} :

$$E_x = \frac{\beta}{\omega \varepsilon} H_y \quad (37)$$

Direção \hat{z} :

$$E_z = -j \frac{1}{\omega \varepsilon} \frac{\partial H_y}{\partial x} \quad (38)$$

Substituindo (37) e (38) em (36), resulta

$$j \frac{1}{\omega \varepsilon} \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} - j \frac{\beta^2}{\omega \varepsilon} H_y = -j\omega \mu H_y$$

Multiplicando ambos os lados por $\left(-\frac{\omega \varepsilon}{j}\right)$, e sabendo que $\omega^2 \mu \varepsilon = k_0^2 n^2$, tem-se

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + (k_0^2 n^2 - \beta^2) H_y = 0 \quad (39)$$

Esta equação é conhecida como a equação de onda de Helmholtz para modo TM. Sua solução segue os mesmos padrões daquela para modos TE, ou seja:

$$H_y(x) = Ae^{-jk_1x} + Be^{jk_1x}$$

As condições de radiação exigem que a constante de propagação κ' em cada camada seja dada por

$$\kappa_1 = j\sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_1^2} = jk_1 \quad (\text{puramente imaginário})$$

$$\kappa_2 = \sqrt{k_0^2 n_2^2 - \beta^2} = k_2 \quad (\text{puramente real})$$

$$\kappa_3 = j\sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_3^2} = jk_3 \quad (\text{puramente imaginário})$$

Na camada n_1 , temos que

$$H_y^{(1)}(x) = A_1 e^{k_1 x} + B_1 e^{-k_1 x}$$

Este campo deve tender a zero quando x tender a mais infinito, implicando em $A_1=0$. Portanto

$$H_y^{(1)}(x) = B_1 e^{-k_1 x}$$

ou ainda,

$$H_y^{(1)}(x) = B_1 e^{-k_1(x-d)} \quad \text{válida de } d \leq x \leq +\infty$$

Na camada n_2 o campo deve apresentar oscilação, assim

$$H_y^{(2)}(x) = A_2 e^{-jk_2 x} + B_2 e^{jk_2 x}$$

$$H_y^{(2)}(x) = C \cos(k_2 x) + D \sin(k_2 x) \quad \text{válida de } 0 \leq x \leq d$$

Na camada n_3 , o campo deve decair exponencialmente, ou seja

$$H_y^{(3)}(x) = A_3 e^{k_3 x} + B_3 e^{-k_3 x}$$

Como o campo deve tender a zero quando x tender a menos infinito, temos que $B_3=0$, assim

$$H_y^{(3)}(x) = A_3 e^{k_3 x} \quad -\infty \leq x \leq 0$$

Reescrevendo os campos, temos

$$H_y^{(1)}(x) = A e^{-k_1(x-d)} \quad d \leq x \leq +\infty \quad (40)$$

$$H_y^{(2)}(x) = B \cos(k_2 x) + C \sin(k_2 x) \quad 0 \leq x \leq d \quad (41)$$

$$H_y^{(3)}(x) = D e^{k_3 x} \quad -\infty \leq x \leq 0 \quad (42)$$

O próximo passo consiste em aplicar as condições de contorno em cada uma das interfaces, para isso devemos conhecer as componentes de campo tangenciais a estas interfaces. No caso de modos TM, essas componentes são H_y e E_z .

a) impondo a continuidade de H_y :

Em $x = d$:

$$H_y^{(1)}(d) = H_y^{(2)}(d)$$

$$A = B \cos(k_2 d) + C \sin(k_2 d) \quad (43)$$

Substituindo (43) em (40), temos

$$H_y^{(1)}(x) = [B \cos(k_2 d) + C \sin(k_2 d)] e^{-k_1(x-d)} \quad (44)$$

Em $x = 0$:

$$H_y^{(2)}(0) = H_y^{(3)}(0)$$

$$D = B \quad (45)$$

Substituindo (45) em (42), temos

$$H_y^{(3)}(x) = B e^{k_3 x} \quad (46)$$

As equações (41), (44) e (46) são as novas expressões para a componente de campo magnético H_y após a aplicação da primeira condição de contorno. Observe que apenas duas constantes de integração estão presentes nesta etapa (B e C).

b) impondo continuidade de E_z :

Os campos em cada camada foram escritos em função da componente principal, H_y . Agora estamos interessados em aplicar a continuidade de E_z nas interfaces, e para isso precisamos encontrar uma relação entre essas duas componentes de campo. Como no caso anterior, isso já foi feito durante a derivação da equação de onda de Helmholtz, como pode ser visto na equação (38), ou seja

$$E_z = -j \frac{1}{\omega \varepsilon} \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

Em $x = d$:

$$-j \frac{1}{\omega \varepsilon_0 n_1^2} \frac{\partial H_y^{(1)}}{\partial x} \Big|_{x=d} = -j \frac{1}{\omega \varepsilon_0 n_2^2} \frac{\partial H_y^{(2)}}{\partial x} \Big|_{x=d}$$

onde foi utilizado o fato de que: $\varepsilon = \varepsilon_0 n^2$, assim $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 n_1^2$ e $\varepsilon_2 = \varepsilon_0 n_2^2$. O termo $\frac{1}{\omega \varepsilon_0}$ é o mesmo em ambos os lados da interface e pode, portanto, ser simplificado. Logo temos:

$$\frac{1}{n_1^2} [-k_1 \{B \cos(k_2 d) + C \sin(k_2 d)\}] = \frac{1}{n_2^2} [-k_2 B \sin(k_2 d) + k_2 C \cos(k_2 d)]$$

Rearranjando, colocando $\cos(k_2 d)$ em evidência, e simplificando, resulta em

$$B = C \cdot \frac{k_1 \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \tan(k_2 d) + k_2}{k_2 \tan(k_2 d) - k_1 \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} \quad (47)$$

Em $x = 0$:

$$-j \frac{1}{\omega \varepsilon_0 n_2^2} \frac{\partial H_y^{(2)}}{\partial x} \Big|_{x=0} = -j \frac{1}{\omega \varepsilon_0 n_3^2} \frac{\partial H_y^{(3)}}{\partial x} \Big|_{x=0}$$

Simplificando o termo $\frac{1}{\omega \varepsilon_0}$ e rearranjando, temos:

$$B = C \cdot \left(\frac{n_3}{n_2}\right)^2 \frac{k_2}{k_3} \quad (48)$$

As equações (47) e (48) podem ser escritas na forma matricial da seguinte maneira:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{k_1 \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \tan(k_2 d) + k_2}{k_2 \tan(k_2 d) - k_1 \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} \\ 1 & -\left(\frac{n_3}{n_2}\right)^2 \frac{k_2}{k_3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B \\ C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

A condição para solução não trivial requer que o determinante da matriz de coeficientes seja igual a 0 (zero), então:

$$\frac{k_1 \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \tan(k_2 d) + k_2}{k_2 \tan(k_2 d) - k_1 \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} = \left(\frac{n_3}{n_2}\right)^2 \frac{k_2}{k_3}$$

Rearranjando, temos

$$\tan(k_2 d) = \frac{k_2 \left[k_1 \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{n_3}\right)^2 k_3 \right]}{k_2^2 - \left(\frac{n_2}{n_3}\right)^2 \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 k_1 k_3} \quad (49)$$

A equação (49) é conhecida como a equação transcendental para modos TM. Mais uma vez, a única variável desconhecida nesta equação é a constante de propagação longitudinal, β , que pode ser facilmente obtida com qualquer rotina para obtenção de raízes.

As equações de campo podem ser escritas em função de uma única constante de integração (B ou C, ver equações de (41) a (44) e (46)), com o auxílio de (48). Assim, escrevendo em função de B, temos

$$H_y^{(1)}(x) = B \left[\cos(k_2 d) + \left(\frac{n_2}{n_3}\right)^2 \frac{k_3}{k_2} \operatorname{sen}(k_2 d) \right] e^{-k_1(x-d)} \quad d \leq x \leq +\infty \quad (50)$$

$$H_y^{(2)}(x) = B \left[\cos(k_2 x) + \left(\frac{n_2}{n_3}\right)^2 \frac{k_3}{k_2} \operatorname{sen}(k_2 x) \right] \quad 0 \leq x \leq d \quad (51)$$

$$H_y^{(3)}(x) = B e^{k_3 x} \quad -\infty \leq x \leq 0 \quad (52)$$

A única constante que precisa ser calculada agora é B. Esta constante pode ser obtida via normalização do campo para modos TM por intermédio da seguinte equação

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} E_x(x) \times H_y^*(x) dx = 1 \quad (W/m)$$

Esta equação nos diz que a densidade de potência óptica transportada pelo modo é de 1W/m. Sabendo que:

$$E_x(x) = \frac{\beta}{\omega \epsilon} H_y(x), \text{ temos}$$

$$\frac{\beta}{2\omega \epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} |H_y(x)|^2 dx = 1 \quad \frac{W}{m} \quad (53)$$

No caso do guia de onda da Figura 7, a equação (53) ficará dividida em três contribuições distintas, sendo elas

- 4) $d \leq x \leq +\infty$, onde deverá ser utilizada a equação (50)
- 5) $0 \leq x \leq d$, onde deverá ser utilizada a equação (51)
- 6) $-\infty \leq x \leq 0$, onde deverá ser utilizada a equação (52)

Em todos os casos, a integral resultante apresenta resultado analítico e exato, e é deixada aqui como exercício para o leitor.